COLLECTION

KOUNOUZ BAC

Kounouz Education

SECTION

MATHÉMATIQUES

4e année secondaire

FICHES BAC

- Concentrés de cours
- Exercices types corrigés
- Astuces méthode

ANALYSE

En pleine Forme !

Kounouz Editions

Kounouz Bac

Fiches Bac

MATHS

SECTION MATHÉMATIQUES

ANALYSE

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur principal des écoles préparatoires et des lycées secondaires

Salima Fakhfakh Maalej
Professeur principal

Abdelbasset Laataoui
Professeur principal

Sami Benrhim
Professeur principal

Nabil Ammar
Professeur principal

© Kounouz Editions 2013
Adresse : 123, Avenue Habib Thameur
Nabeul – 8000 Tunisie
Tél : (+216) 72 223 822
Fax : (+216) 72 223 922
E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn
Site Web : www.Kounouz-Edition.com

Tous les droits sont réservés à l'éditeur.

Préface

Ces fiches sont conçues dans l'intention de faciliter aux futurs bacheliers leur révision et de bien les préparer à l'examen qu'ils auront à passer.

Elles sont conformes aux programmes en vigueur en 4ème année et respectent leurs contenus et leur progression. Elles ont un double avantage pour l'élève puisque d'une part, elles lui donnent un résumé clair des cours et des repères utiles insistant sur les aspects essentiels à retenir. D'autre part, elles l'aident à acquérir une méthodologie de travail lui permettant d'appréhender les difficultés et de les résoudre par l'analyse et la réflexion.

Ces fiches réservent une grande partie à la pratique en proposant des exercices variés portant sur les différentes difficultés et aidant l'élève à assimiler les contenus par la mise en œuvre de ses acquis.

Des corrigés et des réponses détaillés sont donnés à l'élève en guise de pistes de travail pouvant le guider dans la réalisation des exercices et lui permettant de pratiquer son autoévaluation. Cette activité lui permettra de prendre conscience de ses lacunes et de ses difficultés qu'il essaiera de dépasser par la consolidation de ses connaissances.

Nous espérons que ce travail aura l'efficacité requise et aidera les élèves à réaliser une révision méthodique et réfléchie qui les mènera à la réussite.

Les auteurs

Sommaire

N°	CHAPITRE	PAGE
1	Chapitre 1: Limites, continuité et dérivabilité	5
2	Chapitre 2: suites réelles	18
3	Chapitre 3: fonction réciproque	31
4	Chapitre 4: Primitives et intégrales	38
5	Chapitre 5: Logarithme népérien	50
6	Chapitre 6: Fonction exponentielles et puissances	63
7	Chapitre 7: Equation différentielles	73

CHAPITRE 1

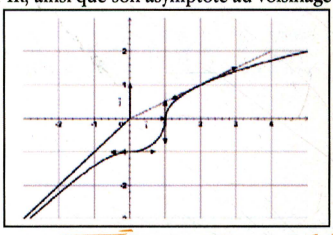
LIMITES, CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Objectif 1

Reconnaitre la limite d'une fonction à partir du graphique

ENONCES

On a représenté ci contre la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR, ainsi que son asymptote au voisinage de - ∞ et ses tangentes aux points d'abscisse respective 0, 1 et 2.
En utilisant le graphique, déterminer les limites suivantes :



$\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} f$;

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)+1}{x}$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{x-2}$.

SAVOIR

☞ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une ***branche parabolique de direction (Ox)***.

☞ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a:≠ 0 et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \Leftrightarrow$ la droite d'équation y = a x + b est ***asymptote oblique*** à C en ± ∞.

☞ Dire que la fonction f est ***dérivable*** en a et que ***le nombre dérivé*** de f en a est le réel L , revient à dire que ***le taux de variation*** de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$,admet pour limite finie L quand h tend vers 0 .

Le nombre dérivé est noté f '(a) , et on a : $f'(a) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

☞ Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une ***tangente*** T de coefficient directeur f ' (a).

☞ Une équation de la tangente en ce point est : y = f ' (a) (x – a) + f (a)

Si $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivables en a , mais Cf admet une tangente verticale en a.

SOLUTIONS

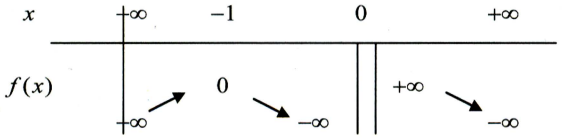
$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)+1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \frac{1}{2}$

Objectif 2

Calculer la limite d'une fonction composée

ENONCES

La fonction f a pour tableau de variation :



Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.

SAVOIR

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b *et* c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=c$

SOLUTIONS

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{+\infty} f=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)=-\infty$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-1+\frac{1}{x}=(-1)^+\\ \lim\limits_{(-1)^+} f=f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}-1+\frac{1}{x}=(-1)^-\\ \lim\limits_{(-1)^-} f=f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{-\infty} f=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}=0^-\\ \lim\limits_{0^-} f=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)=-\infty$;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{2+x^2}=-1\\ \lim\limits_{-1} f=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)=0$;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{+\infty} f=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)=-\infty$

Objectif 3

Calculer la limite d'une fonction en utilisant l'encadrement

ENONCES

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$, $\forall x \in IR$.

a) Montrer que : $\begin{cases} \forall x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \le f(x) \le x+1 \\ \forall x < -1,\ x-1 \le f(x) \le \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

b) Chercher $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$

SAVOIR

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I (noté I^*_a). Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$, alors $\ell \le \ell'$.
- Si $h(x) \le f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a h = \lim\limits_a g = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.
- Si $f(x) \ge g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a g = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.
- Si $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

SOLUTIONS

a) $\forall x \in IR,\ -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \forall x \in IR,\ x-1 \le x+\sin x \le x+1$

$\forall x \in IR,\ 1 \le 2-\sin x \le 3 \Rightarrow \forall x \in IR,\ \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2-\sin x} \le 1$

$\forall\ x > 1,\ 0 < x-1 \le x+\sin x \le x+1$ et $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2-\sin x} \le 1 \Rightarrow \forall\ x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \le f(x) \le x+1$

$\forall\ x < -1,\ x-1 \le x+\sin x \le x+1 < 0$ et $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2-\sin x} \le 1 \Rightarrow \forall\ x < -1,\ x-1 \le f(x) \le \dfrac{x+1}{3}$

b) $\forall\ x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \le f(x) \le x+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{3} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

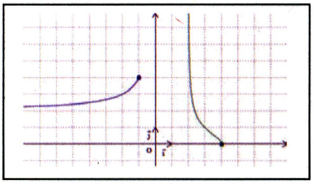
$\forall\ x < -1,\ x-1 \le f(x) \le \dfrac{x+1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Objectif 4

*Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
* Prouver l'existence d'une solution de l'équation f(x) = k

ENONCES

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ci – dessous, est tracée les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g.



La fonction f est définie sur] - ∞, - 1] et
la fonction g est définie sur]2, 4].

1. Donner graphiquement :
f(-1), f(-2), g(4), g(3), $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{2^+} g$.

2. En déduire g o f([-2, -1]) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g \circ f(x)$.

3. Etudier le sens de variation de g o f sur]-∞, -1].

4. Prouver que l'équation
g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

SAVOIR

☞ Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

☞ Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

On peut aussi l'exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$ Si de plus f est ***strictement monotone*** sur I, alors ***c est unique***.

SOLUTIONS

1. $f(-1) = 4$; $f(-2) = 3$; $g(4) = 0$; $g(3) = 1$ et $\lim\limits_{2^+} g = +\infty$

2. $g \circ f([-2, -1]) = g(f([-2,1])) = g([3,4]) = [0,1]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2^+ \\ \lim\limits_{2^+} g = +\infty \end{cases}$

3. f est strictement croissanta sur $]-\infty, -1]$ et g est strictement décroissante sur $]2,4]$
   $\Rightarrow$ g o f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$

4. $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]-\infty,-1] \\ g \text{ est continue sur }]2,4] \\ f(]-\infty,-1]) =]2,4] \end{cases} \Rightarrow g \circ f \text{ est continue sur }]-\infty,-1]$ en particulier sur [-2, -1]

$$g \circ f(-1) = 0 < \frac{1}{2} < g \circ f(-2) = 1$$

g o f est strictement décroissante sur [-2, -1]
$\Rightarrow$ l'équation g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

Objectif 5

Etudier le signe d'une fonction sur un nintervalle donné

ENONCES

Etudier le signe de $f(x)=\sqrt{x^2-4x}+3x$ sur son domaine de définition.

SAVOIR

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

SOLUTIONS

f est continue sur son domaine de définition $]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0			$+$	

Objectif 6

Etudier la dérivabilité d'une fonction composée sur un intervalle donné

ENONCES

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par : $f(x) = \cos\sqrt{x}$

1. a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner f ′ (0)

2. a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer f ′ (x).

b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

SAVOIR

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur I} \\ g \text{ est dérivable sur J} \\ f(I) \subset J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$, $\forall x \in I$.

SOLUTIONS

1.a) $\forall x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = \cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 = \cos\left(2 \times \frac{\sqrt{x}}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{4} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

2.a) $f(x) = \cos\sqrt{x} = u \circ v$ où $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$\begin{cases} v \text{ est dérivable sur }]0, \pi^2] \\ u \text{ est dérivable sur IR} \\ v(]0, \pi^2]) =]0, \pi] \subset IR \end{cases} \Rightarrow u \circ v$ est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et on a :

$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(-\sin\sqrt{x}\right) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, \pi^2]$

de plus on a : f est dérivable à droite en 0 $\Rightarrow$ f est dérivable sur $[0, \pi^2]$

x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

Objectif 7

* Démontrer une inégalité, en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finies
* Utiliser cette inégalité pour démontrer la convergence d'une suite réelle

ENONCES

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de IN, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^2\right)$.

1. Soit la fonction définie sur [1,2] par $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur [1,2] et que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

c) En déduire que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.

SAVOIR

☞ ***Théorème 1*** : (théorème de Rolle)
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et vérifiant : f(a) = f(b)
Si f est dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un élément x_o de]a,b[tel que $f'(x_o) = 0$

☞ ***Théorème 2*** : (théorème des accroissements finis)
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b]
Si f est dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un élément x_o de]a,b[tel que $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

☞ ***Théorème 3 :***
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b], dérivable sur]a,b[
On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour $x \in]a,b[$.
On a alors $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$ M

☞ ***Théorème 4 :***
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in$ I. On a alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous a et b de I.

SOLUTIONS

1. a) f est une fonction polynôme dérivable sur IR en particulier sur [1, 2] et on a :

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x \Rightarrow |f'(x)| = f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [1, 2]$

b) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [1,2] \\ \sqrt{2} \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [1,2]$, on a : $|f(x) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$

2. a) Pour n = 0, $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{2}$

pour $n \geq 0$, supposons que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

En effet : $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et f est strictement croissante sur [1,2] $\Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{2}) \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2} < \sqrt{2}$

Ainsi pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Pour tout x de [1,2], $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$ et $1 \leq u_n \leq 2$

$\Rightarrow |f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}| \Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$

c) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) Pour n = 0, $|u_0 - \sqrt{2}| = |1 - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

e) Pour $n \geq 0$, supposons que $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

f) En effet : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$ et $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Expression d'une fonction

1°) Soit $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-3}$ ***(mode COMP)+(MthIO)***

Pour la valeur de x , utiliser la touche ALPHA et la touche) .

2°) Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x-1}+x+1$ ***(mode COMP)+(MthIO)***

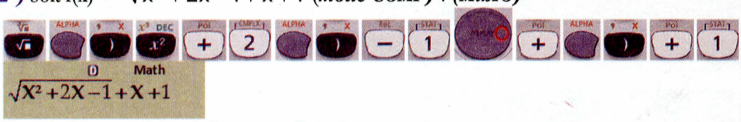
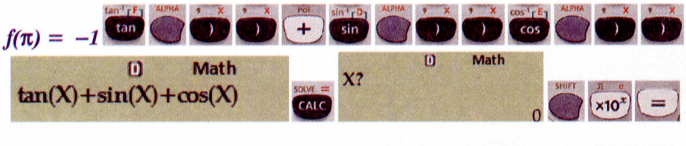


Image d'un nombre réel par une fonction

1°) Soit $f(x) = tgx+\sin x+\cos x$

f(π) = −1



*2°)*Soit $f(x) = 1+\ln x$ *,f(e) = 2*

Limites d'une fonction

Pour avoir une idée de la valeur de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,donner à x des valeurs proches de x_0 et calculer f(x).

❑ *Limite en un point*

Exemple : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{-3x}{x^2-1}$)

X	f(X) ≈	Appuyez sur ces touches :
-0.9	-14.21052632	CALC (−) 0 . 9 =
-0.99	-149.2462312	CALC (−) 0 . 9 9 =
-0.999	-1499.249625	CALC (−) 0 . 9 9 9 =

ce qui confirme les valeurs (***et surtout les signes!***) que nous avons trouvées $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1} = -\infty$

❑ ***Limite à l'infini***

Exemple : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{\cos x}{x^2-1}$)

X	f(X)≈	Appuyez sur ces touches :
10	-0.00847546999	CALC 1 0 =
100	0.00008624051	CALC 1 0 0 =
1000	0.00000056237	CALC 1 0 0 0 =

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1} = 0\ (0^+)$

Encadrement d'une solution MODE SETUP CONST 7

Exemple :Soit $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9}{2}$

f(x) = 0 admet une unique solution α dans [1 ; 4].

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

1ère étape : ***Encadrement à l'unité près***

MODE SETUP CONST 7 ALPHA) X POL + MATRICES 4 ALPHA) X x^3 DEC − CLR 9 COMPLEX 2

Math
$f(X) = X + \dfrac{4}{X^2} - \dfrac{9}{2}$ =

Math
Start? 1 START 1 =

Math
End? 5 MATRICES 4

Math
Step? 1 START 1 =

	X	F(X)
1	1	0.5
2	2	-1.5
3	3	-1.055

1

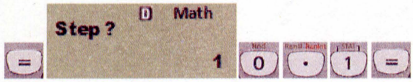
f(1) > 0
f(2) < 0
donc 1 < α < 2

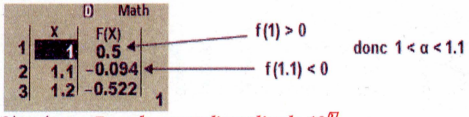
2ère étape :***Encadrement d'amplitude 10^{-1}***

Math
Start? 1 START 1 =

Math
End? 4 COMPLEX 2

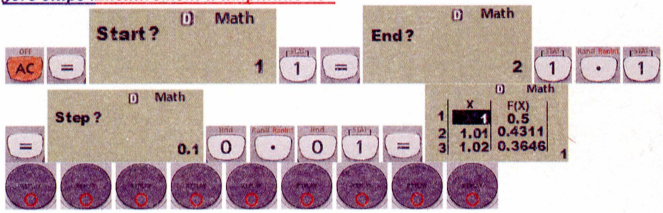
OFF AC =





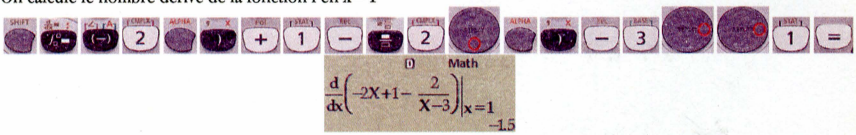
donc $1 < \alpha < 1.1$

3ère étape :Encadrement d'amplitude 10^{-1}



*Nombre dérivé d'une fonction*Soit $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-3}$

On calcule le nombre dérivé de la fonction f en $x=1$



Donc $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$

CHAPITRE 2

SUITES REELES

Objectif 1

Manipuler les opérations sur les suites pour décider la convergence ou la monotonie d'une suite

ENONCES

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Répondre par vraie ou fausse à chacune des propositions ci dessous (une justification est demandée).

1) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2) si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3) si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4) si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.

SAVOIR

☞ si (u_n) converge vers L. $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ a pour limite $\dfrac{1}{L}$ si $L \neq 0$, c'est le cas $L = 0$ qui pose problème, pour batir un exemple, on examine des suites simples convergentes vers 0.

☞ La suite (U_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_0 \leq u_1 \leq \ldots\ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots\ldots$

☞ La suite (U_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre décroissant : $u_0 \geq u_1 \geq \ldots\ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots\ldots$

☞ Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

☞ Une suite (U_n) est dite ***convergente*** lors qu'elle admet une ***limite finie*** quand n tend vers $+\infty$

☞ Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***, dans ce cas elle peut avoir une limite infinie ou ne pas avoir une limite en $+\infty$.

SOLUTIONS

1) fausse : soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, (u_n) est à termes non nuls et converge vers 0 et $v_n = -2(n+1)$ a pour limite $-\infty$ donc n'est pas convergente.

2) vraie : (u_n) est minorée par 2, donc pour tout n $\in$ N, $u_n \geq 2$ d'où $\dfrac{2}{u_n} \leq \dfrac{2}{2}$ et donc $v_n \leq -1$, (v_n) est donc bien minorée par -1.

3) Fausse : le contre exemple de 1) le prouve.

4) Fausse : comme contre exemple, prenons $u_n = (-1)^n$.

Objectif 2

* Etudier la limite d'une suite du type $u_n = f(n)$ ou $u_n = f(v_n)$

* Utiliser le théorème de comparaison pour déterminer la limite d'une suite

ENONCES

1) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$, $n \in N^*$.

2) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(0,2)^n - 1}{(0,2)^n + 1}$; $n \in N$.

3) Soit $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$ pour $n \in N^*$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $v_n = 3(1 - \dfrac{1}{n+1})^3$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

b) Monter que pour tout $n \geq 7$, $v_n \geq 2$.

c) En déduire que pour $n \geq 8$, $v_7 \times v_8 \times .... \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$ puis que $u_n \geq 2^{n-7} u_7$

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

SAVOIR

✓ f est une fonction définie sur $]a, +\infty[$ et (u_n) la suite telle que $u_n = f(n)$

l est un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

✓ f est une fonction définie sur I, (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = c$.

✓ Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que : $w_n \leq u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{+\infty} w_n = \lim\limits_{+\infty} v_n = l$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = l$

✓ Si $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$. Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = -\infty$.

SOLUTIONS

1) on a : $u_n = f(n)$ où f : $x \to f(x) = \dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

2) posons pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 0,2^n$, alors $u_n = f(v_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} (x \neq -1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ (v est géométrique de raison 0,2)

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

3) a) $v_n = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \times \dfrac{n^3}{3^n} = \dfrac{3^{n+1} \times n^3}{3^n \times (n+1)^3} = 3 \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3 = 3 \times \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$)

b) si $n \geq 7$, $n+1 \geq 8$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{8}$ et $1 - \dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{7}{8}$, d'où $v_n \geq 3.\left(\dfrac{7}{8}\right)^3$.

Or $3.\left(\dfrac{7}{8}\right)^3 \geq 2$.

Donc $v_n \geq 2$ pour $n \geq 7$.

c) $v_7 \times v_8 \times .... \times v_{n-1} \geq 2 \times ..... \times 2 (n-7 \text{ facteurs})$, donc $v_7 \times .... \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$

or $v_7 \times .... \times v_{n-1} = \dfrac{u_8}{u_7} \times \dfrac{u_9}{u_8} \times ..... \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{u_n}{u_7}$ donc $\dfrac{u_n}{u_7} \geq 2^{n-7}$

par suite $u_n \geq 2^{n-7}\ u_7$ car $u_7 > 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-7} = +\infty$, par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Objectif 3

Etudier la convergence d'une suite monotone

ENONCES

On a tracé ci- après, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (ζ) représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^x-2$ ainsi que la droite $\Delta : y=x$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1) conjecturer à partir du graphique, le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

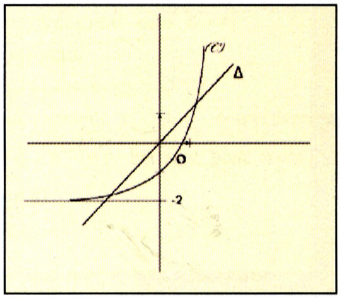
2) prouver que :

a) la suite (u_n) est décroissante.

b) pour tout entier $n\in N$, $-2\le u_n\le 0$, déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a) démontrer que l'équation $f(x)=x$ a deux solutions et deux seulement dans R.

b) trouver un encadrement de la limite l de la suite (u_n) d'amplitude 10^{-1}.



SAVOIR

- ✓ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- ✓ Si une suite (u_n) est telle que :* $u_{n+1}=f(u_n)$
  * (u_n) est convergente vers l
  * f continue, en l

Alors $f(l)=l$ (donc l est une solution de l'équation $f(x)=x$).

SOLUTIONS

1) en représentant les premiers termes de la suite (u_n), le graphique me permet de conjecturer que (u_n) est décroissante minorée par $u_0 = 0$ et qu'elle est donc convergente.

2) utilisons un raisonnement par récurrence.

a) *on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

donc $u_0 = 0 \geq u_1 = -1$.

Supposons que $u_{n-1} \geq u_n$ et démontrons que $u_n \geq u_{n+1}$.

$u_{n-1} > u_n$ donc $f(u_{n-1}) \geq f(u_n)$ (f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) = e^x > 0$; $x \in \mathbb{R}$)

ainsi $u_n \geq u_{n+1}$, d'où (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

b) * on a $u_0 = 0$ donc $-2 \leq u_0 \leq 0$.

* supposons que $-2 \leq u_n \leq 0$ et démontrons que $-2 \leq u_{n+1} \leq 0$.

$-2 \leq u_n \leq 0$ donc $f(-2) \leq f(u_n) \leq f(0)$ (car f est croissante sur R).

Ainsi $e^{-2} - 2 \leq u_{n+1} \leq -1$, or $e^{-2} - 2 \geq -2$ et $-1 \leq 0$ donc $-2 \leq u_{n+1} \leq 0$, par suite pour $n \in N$, $-2 \leq u_n \leq 0$.

3) a) Soit $\varphi(x) = f(x) - x$, φ est dérivable sur IR et $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = e^x - 1$.

Le théorème de la bijection affirme que l'équation $\varphi(x) = 0$ c'est-à-dire

$f(x) = x$ admet exactement 2 solutions dans IR, l'une dans $]-\infty, 0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$.

b) (u_n) est telle que :

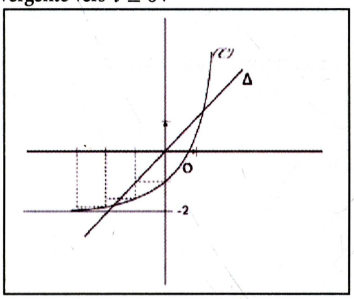
- ✓ $u_{n+1} = f(u_n)$.
- ✓ (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente vers $l \leq 0$.
- ✓ $f : x \to e^x - 2$ est continue sur R, en particulier en l.

Donc $f(l) = l$ avec $l \leq 0$.

$\varphi(-1,5) < 0$ donc $l \in]-2,-1,5[$ $(\varphi(-1,5) \simeq -0.276)$

$\varphi(-1,8) < 0$ donc $l \in]-1,8;-2[$ $(\varphi(-1,8) \simeq -0,034)$.

$\varphi(-1,9) > 0$ donc $-1,8 < l < -1,9$ $(\varphi(-1,9) \simeq 0,049)$.

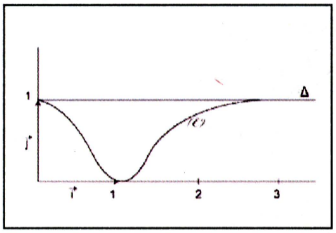


Objectif 4

Montrer que deux suites sont adjacentes

ENONCES

On a tracé ci après, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (ζ) représentative d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$, ainsi que son asymptote $\Delta_1 : y=1$.



1°) a) par lecture graphique préciser en fonction d'un réel donné k, le nombre de solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f(x)=k$.

b) $n\in N^*$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

2°) a) Soit $n\geq 2$, montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement dans $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

b) Construire sur l'axe des abscisses, les termes u_n et v_n pour $n\in\{1,2,3\}$

c) Déterminer le sens de variation des suites u et v.

d) Montrer que les suites u et v sont convergentes. En déduire que u et v sont adjacentes.

SAVOIR

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la suite (v_n-u_n) converge vers O.

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :

*elles sont toutes les deux convergentes.

*elles ont la même limite.

SOLUTIONS

1°)

a)

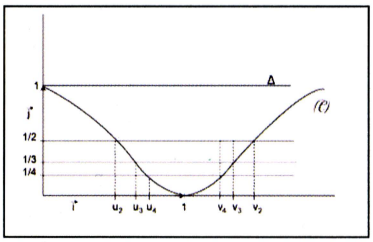
k	$-\infty$	0	1	$+\infty$
nombre de solutions de $f(x)=k$	pas de solution	2 solutions	pas de solution	
		1 solution	1 solution	

b) l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes pour $0<\frac{1}{n}<1$, c'est-à-dire pour $n>1$.

2°) a) • f est continue et strictement décroissante sur [0,1] et f ([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1] et pour tout $n\geq 2$, $\frac{1}{n}\in [0,1[$, donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution $u_n\in [0,1]$.

• f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $f([1,+\infty[)=[f(1),\lim_{+\infty} f[=[0,1[$ or pour tout $n\geq 2$, $\frac{1}{n}\in [0,1[$, donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution v_n dans $[1,+\infty[$

b)



c) pour $n\geq 2$, $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}$

• sur [0,1] ; ou a $\begin{cases} f(u_n)\geq f(u_{n+1}) \\ f \text{ décroissante} \end{cases}$ donc $u_n\leq u_{n+1}$ et d'où u est croissante

• sur $[1,+\infty[$; ou a $\begin{cases} f(v_n)\geq f(v_{n+1}) \\ f \text{ est croissante} \end{cases}$ donc $v_n\geq v_{n+1}$, ainsi v est décroissante

d) la suite u est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers
$l \in [0,1]$
la suite v est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers
$l' \in [0,1]$

Le plus $f(u_n) = f(v_n) = \frac{1}{n}$ et f est continue sur $[0,+\infty[$, donc elle est continue en l et l', ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(u_n) = f(l) \\ \lim\limits_{+\infty} f(v_n) = f(l') \text{ donc } f(l) = f(l') = 0, \text{ ainsi } l = l' = 1 \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que les suites u et v sont adjacentes puisque l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Objectif 5

Chercher la limite commune de deux suites adjacentes

ENONCES

Soit les deux suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par la donnée de u_0 et $v_0 (u_0 < v_0)$ et les relations de récurrence : $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

1) Démontrer que la suite v-u est une suite géométrique et donner sa limite.
2) Montrer que, la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
3) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4) Montrer que la suite v+u est une suite constante.
5) En déduire la valeur de la limite commune des deux suites u et v.

SAVOIR

1) Une suite (W_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $W_{n+1} = q \times W_n$ dans ce cas on a : $W_n = W_0 \times q^n$.

2) $$\lim_{1 \to +\infty} W_n = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in]-1,1[\\ W_0 \text{ si } q = 1 \\ \pm\infty \text{ si } q > 1 \\ \text{n'existe pas si } q \leq -1 \end{cases}$$

SOLUTIONS

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)(v_n - u_n)$, d'où $(v-u)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 + u_0$ comme $\frac{1}{3} \in]-1,1[$ alors $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) > 0 \quad (\text{car } v_0 > u_0)$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) > 0$ d'où (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) < 0$ d'où (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

3) On a : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + u_{n+1} = \frac{3(u_n + v_n)}{3} = u_n + v_n$

On montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0$ (Récurrence)

D'où la suite (v+u) est constante sur $\mathbb{N}$.

5) On a : • $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (car (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite)

• $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = u_0 + v_0$

On en déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell + \ell = u_0 + v_0$

ainsi $2\ell = u_0 + v_0$, $\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

■ *Suites récurrentes*

L'instruction rappelle le résultat du dernier calcul effectué. Elle peut s'avérer très commode pour calculer les termes d'une suite récurrente.

On considère, ***par exemple***, la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2u_n - 5.$$

n	u_n	Appuyez sur ces touches :
1	13	9 = 2 Ans − 5 =
2	21	=
3	37	=
4	69	=

■ *Calculs* $\sum$

:(MODE COMP)+(MthIO) ; $\sum_{k=0}^{10} 4k+1 = 231$

CHAPITRE 3

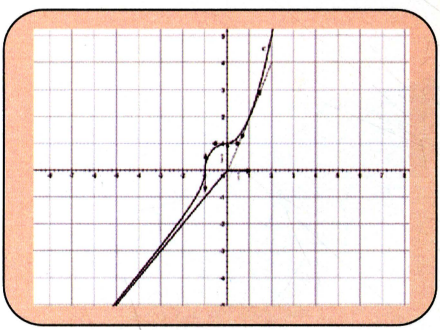
Fonction réciproque

Objectif 1

* Justifier l'existence d'une fonction réciproque f^{-1}
* Tracer sa courbe représentative
* Etudier la dérivabilité de f^{-1} en un point donné

ENONCES

On a représenté ci-contre,
la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR, ainsi que son asymptote au voisinage de $-\infty$ et ses tangentes aux points d'abscisses respectives – 1, 0 et 1.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Justifier l'existence d'une fonction réciproque f^{-1} de f.
b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en chacun des réels 0, 1 et 2.
c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
d) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que celui de f.

SAVOIR

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. on a alors les propriétés suivantes :

- La fonction f est une bijection de I sut f(I).
- La fonction f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et a le même sens de variation que f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un même repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.
- Si de plus f est une fonction dérivable sur I et si $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f^{-1}, réciproque de f, est dérivable sur f(I) et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ pour tout x de f(I)}$$

SOLUTIONS

1.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖	↗		↗	$+\infty$

2. a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur IR et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR à valeurs dans IR.

b) *f n'est pas dérivable en - 1 et on : $f(-1)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=+\infty$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et on a $\left(f^{-1}\right)'(0)=0$.

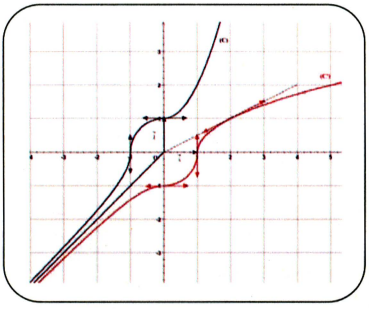
* f est dérivable en 0 et on : $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1.
* f est dérivable en 1 et on : $f(1)=2$ et $f'(1)=2$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et on a :

$\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{2}=0.5$.

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\left(f^{-1}\right)'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$\left(f^{-1}\right)(x)$	$-\infty$	↗		↗	‖	↗	$+\infty$

d)



Objectif 2

* Justifier l'existence d'une fonction réciproque g-1
* Tracer sa courbe représentative
* Expliciter g-1(x)

ENONCES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle] 0, + ∞[réalise une bijection de]0, + ∞[sur un intervalle I que l'on déterminera.

b) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(x)$, pour $x \in I$.

SAVOIR

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. on a alors les propriétés suivantes :
La fonction f^{-1}, réciproque de f, est une bijection de f(I) sur I et on a : $(x \in I, y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(I), x = f^{-1}(y))$

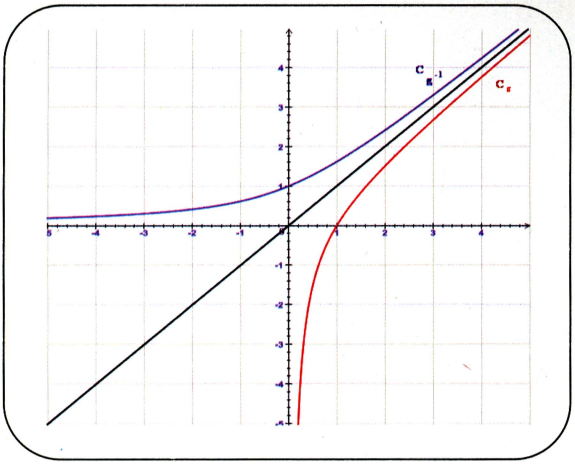
SOLUTIONS

a) Chacune des fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur]0, + ∞[; donc la fonction g est continue et strictement croissante sur]0, + ∞[.

Il en résulte que g est une bijection de]0, + ∞[sur g(]0, + ∞[ ) = $\left]\lim_{0^+} g, \lim_{+\infty} g\right[$ =]- ∞, + ∞[.

b) Tableau de variation de g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



c) Soit x un réel quelconque et y un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - xy - 1 = 0$

Le discriminant de l'équation $y^2 - xy - 1 = 0$ est $\Delta = x^2 + 4 > 0$.

Cette équation admet donc deux solutions : $y_1 = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$ et $y_2 = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$. On vérifie que $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$. La solution, dans $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation $y^2 - xy - 1 = 0$ d'inconnue y est donc $y = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Conclusion : pour tout réel x, on a : $g^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Objectif 3

Etudier la dérivabilité d'une fonction réciproque sur un intervalle donné et calculer sa fonction dérivée

ENONCES

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g sa fonction réciproque. Construire ζ_f et ζ_g dans un même repère orthonormé.

2. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$, $g'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$.

SAVOIR

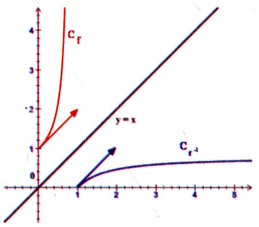
Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et si $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f^{-1}, réciproque de f, est dérivable sur f(I) et on a : $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour tout x de f(I).

SOLUTIONS

$f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et on a : $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur $J=[1,+\infty[$



1. f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et on a : $f'(x)\neq 0$

$\Rightarrow$ g est dérivable sur [1, + ∞[et on a : $g'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{(1-\tan t)^2}{1+\tan^2 t}$

Où $t=f^{-1}(x)\Rightarrow f(t)=x\Rightarrow 1-\tan t=\frac{1}{x}\Rightarrow 1+\tan^2 t=1+(1-\frac{1}{x})^2$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2x^2-2x+1}$, $\forall x\in[1,+\infty[$

Objectif 4

Etudier une fonction racine n-ième

ENONCES

f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+1}$.

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

c) Démontrer que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$.

d) En déduire le sens de variation de f.

SAVOIR

☞ Pour tout réel x strictement positif : $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln x}$ ($n\geq 2$).

$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$, si $u(x)>0$ et $n\geq 2$.

SOLUTIONS

a) Pour tout $x\in$IR, $-x\in$IR. $f(-x)=\sqrt[3]{2(-x)^2+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}=f(x)$ donc f est paire.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt[3]{y}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

f étant paire, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

c) La fonction $x\mapsto 2x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur IR.

La fonction $y\mapsto\sqrt[3]{y}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Par la théorème sur les composées, f est dérivable sur IR.

Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$.

d) le signe de $f'(x)$ est celui de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

CHAPITRE 4

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Objectif 1

Reconnaitre une primitive d'une fonction

ENONCES

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$

Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

SAVOIR

F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f alors $\begin{cases} F(x)-g(x)=\text{constante} \\ F'(x)=G'(x) \end{cases}$

SOLUTIONS

Pour t Pour tout $x\in]-1;+\infty[$, $G(x)-F(x)=$

$$x-2+\frac{1}{x+1}-\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2+x-2x-2+1-x^2-x-1}{x+1}$$

$$=\frac{-2x-2}{x+1}=-2$$

$\Rightarrow$F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f, avec $f(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Objectif 2

Faire le lien entre primitive et intégrale

ENONCES

Ecrire, sous la forme intégrale, la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en t_0 et la calculer dans les cas suivants :

A) $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$, $t_0=1$; **b)** $f(t)=-\dfrac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$, $t_0=2$; **c)** $f(t)=\dfrac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sqrt{t}}$, $t_0=4$

SAVOIR

☞ Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et a un réel de I, la fonction F telle que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

☞ Le plus souvent le calcul d'une intégrale se ramène à la recherche d'une primitive.

Ainsi, le calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$ revient généralement à justifier l'existence d'une primitive F de f sur I, puis à calculer F à l'aide du tableau des primitives usuelles ; on a alors immédiatement $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

SOLUTIONS

A) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=1-\frac{1}{x}$

b) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $G(x)=\int_1^x -\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}dt=\left[e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x=e^{\frac{1}{x}}-e$

c) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $F(x)=\int_4^x \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sqrt{t}}dt=2\int_4^x\left(\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt=2\left[e^{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right]_4^x$

$=2\left(e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-e^2+2\right)$

Objectif 3

Encadrer une intégrale

ENONCES

1°) Prouver que : $\int_1^3 \sin(t^2)dt \le 2$.

2°) Montrer que : $0 \le \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \le 1$.

SAVOIR

- Si f est continue et positive sur I, et si $a \le b$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
- Soit I un intervalle, a et b dans I tel que $a \le b$, soient f et g continues sur I.

$f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

SOLUTIONS

Dans les deux cas, les fonctions considérées sont continues sur IR, donc intégrables sur l'intervalle d'intégration.

1°) Puisque $\sin(t^2) \le 1$, alors $\int_1^3 \sin(t^2)\,dt \le \int_1^3 1dt$. Or $\int_1^3 1dt = 1(3-1) = 2$, donc $\int_1^3 \sin(t^2)\,dt \le 2$.

2°) Puisque $0 \le x \le 1$, alors : $0 \le \frac{x}{1+x^2} \le x \le 1$. D'où $0 \le \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \le \int_0^1 1dx$.

Or $\int_0^1 1\,dx = 1$ donc $0 \le \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \le 1$.

Objectif 4

Etudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale

ENONCES

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$

1°) Montrer que F est dérivable sur IR puis calculer $F'(x)$ pour tout $x \in$ IR.

2°) Soit $\varphi(x) = F(1-x) + F(x), x \in$ IR.

a) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x de IR puis $\varphi(\frac{1}{2})$.

b) En déduire que le point I $(\frac{1}{2}; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de F.

SAVOIR

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel de I alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et on a : pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$
- Soit f une fonction définie sur un ensemble D, le point I(a, b) est un centre de symétrie de la courbe de f, si et seulement si, pour tout x de D, on a : $\begin{cases} (2a-x) \in D \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

SOLUTIONS

1°) $t^2 - t + 1 > 0$ car $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$t \mapsto t^2 - t + 1$ est une fonction polynôme continue et strictement positive sur IR donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}}$ est continue sur IR ainsi F est dérivable sur IR et pour tout de IR on a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

2°) ***a)*** $\varphi(x) = F(1-x) + F(x)$, $\varphi'(x) = -F'(1-x) + F'(x)$

$= \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x+x^2-1+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ainsi, $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{2}) = 2F(\frac{1}{2})$ or $F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = 0$ donc $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

b) $\varphi'(x) = 0$ donc $\varphi(x) = c$ où $c \in IR$ pour tout $x \in IR$ or $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

donc $c = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$ ainsi pour tout $x \in D_f = IR$ on a $(1-x) \in D_f$ et $F(1-x) + F(x) = 0$

donc I $(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Objectif 5

Calculer l'intégrale d'une fonction continue (utiliser la parité ou la périodicité de cette fonction)

ENONCES

Calculer : a) $\int_{-1}^{1} x^3 \cos x \, dx$; b) $\int_{-3}^{3} |x| \, dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x \, dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$

SAVOIR

Soit f une fonction continue sur $[-a\,;a]$, avec a> 0.

- Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ alors : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$, alors : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T ,$f(x + T) = f(x)$ alors, pour tout réel a : $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$

SOLUTIONS

a) $x \mapsto x^3 \cos x$ est une fonction 2π périodique et impaire $\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 \cos x \, dx = 0$

b) $x \mapsto |x|$ est une fonctionnaire $\Rightarrow \int_{-3}^{3} |x| \, dx = 2\int_{0}^{3} |x| \, dx = 2\int_{0}^{3} x \, dx = \left[x^2\right]_0^3 = 9$

c) $x \mapsto \sin 2x$ est une fonctionπpériodique et impaire $\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+\pi} \sin 2x \, dx = \int_{0}^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$

d) $x \mapsto |\cos x|$ est une fonctionπpériodique et paire

$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| \, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| \, dx = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$

Objectif 6 — Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties

ENONCES

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; (b) $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$; (c) $\int_0^1 x\,e^x\,dx$; (d) $\int_0^{\pi} (x+2)\sin x\,dx$;

SAVOIR

Soient u et v deux fonctions dérivables dont leurs dérivées sont continues sur un même intervalle [a ;b] et f une fonction continue sur [a ;b] telle que $f(x) = u(x)\,v'(x)$.

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Cette technique permet dans la pratique d'intégrer ou de simplifier certaines intégrales où $f(x)$ est le produit d'une fonction u de dérivée simple et d'une fonction v facile à intégrer.

SOLUTIONS

(a) On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=2\sqrt{x+1}$

Les fonctions u, u', v, v' sont continues sur [0 ; 1]. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$

(b) On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x^2$ .Il vient $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{x^3}{3}$.

La formule d'intégration par parties donne :

$\int_1^2 x^2\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx$. Ainsi $\int_1^2 x^2\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

(c) On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=e^x$ .Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=e^x$.

La formule d'intégration par parties donne :

$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$. *Ainsi* $\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$

$= \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 1$

d) On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \sin x$ .Il vient $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$.

$\int_1^2 (x+2)\sin x\,dx = \left[-(x+2)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx$.

Ainsi $\int_1^2 (x+2)\sin x\,dx = \left[-(x+2)\cos x\right]_0^\pi + \left[\sin x\right]_0^\pi = \pi + 4$

Objectif 7

* Etudier une suite définie à l'aide d'une intégrale
* Calculer le volume d'un solide de révolution

ENONCES

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1°) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2°) ***a)*** Démontrer que, $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

3°) Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, par rotation autour de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$, la courbe d'équation $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

(avec $x \in [1 ; e^2]$) , engendre un solide de révolution .
Calculer le volume de ce solide en unités de volume.

SAVOIR

Pour trouver le volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe d'une fonction autour de (Ox):

- ✓ On coupe le solide par un plan perpendiculaire à l'axe et on remarque que l'on trouve un disque de rayon $|f(x)|$.
- ✓ L'aire de ce disque vaut $\pi[f(x)]^2$.
- ✓ On calcule alors : $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$ pour obtenir le volume.

SOLUTIONS

1°) $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$, on pose: $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $u(x) = -\frac{1}{x}$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.

La formule d'intégration par parties donne:

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{2}{e^2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}. \; I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}.$$

2°) ***a)*** On calcule I_{n+1} par parties en posant: $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $u(x) = -\frac{1}{x}$, $v(x) = (\ln x)^{n+1}$, $v'(x)$ $= (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$.

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -(n+1)\frac{1}{x^2}(\ln x)^n dx = -\frac{1}{e^2}\times 2^{n+1} + (n+1)\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$

$$= -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n .$$

b) $I_2 = -\frac{4}{e^2} + 2I_1 = -\frac{4}{e^2} + 2(1-\frac{3}{e^2}) \Rightarrow I_2 = 2 - \frac{10}{e^2}$, $I_3 = -\frac{8}{e^2} + 3I_2$

$$= -\frac{8}{e^2} + 3(2-\frac{10}{e^2}) \Rightarrow I_3 = 6 - \frac{38}{e^2}$$

3°) Le volume d'un solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur [a ; b], a < b, est donné par la formule:

$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$ .Pour la courbe d'équation $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$ sur $[1 ; e^2]$.

$$V = \pi\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^4}{x^2}dx = \pi I_4 = \pi(-\frac{16}{e^2} + 4I_3) = \pi(24 - \frac{168}{e^2}).$$ (en unités de volume).

Objectif 8

Calculer l'aire d'un domaine plan

ENONCES

Soit x_0 un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur IR par

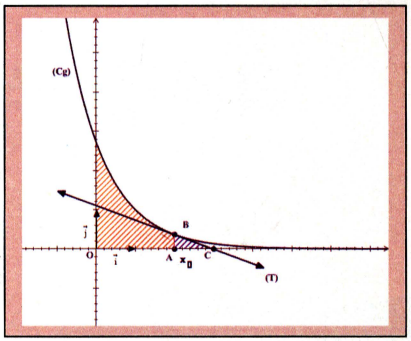
$g(x) = e^{1-x}$ et sa courbe représentative (C_g).

1°) On considère le domaine limité par (C_g), les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_0$ et l'axe des abscisses. Exprimer, à l'aide de x_0, l'aire S_1 de ce domaine.

2°) A est le point de coordonnées $(x_0 , 0)$; B est le point de (C_g) d'abscisse x_0. Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point B.On note C le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.

a) Déterminer les coordonnées de C

b) Calculer (en unités d'aires) l'aire S_2 du triangle ABC. Vérifier que $S_1 + 2S_2 = e$.



SAVOIR

☞ Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a ; b]$, et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

$\int_a^b |f(x)|dx$ est ***l'aire***, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

☞ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a, b], l'aire du domaine limité par Cf, Cg et les droites d'équations x = a et x = b est : $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ u.a

SOLUTIONS

1°) $S_1 = \int_0^{x_0} e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^{x_0} = e - e^{1-x_0}$.

2°) *a)* Equation de la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0 :

$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = -e^{1-x_0}(x - x_0) + e^{1-x_0}$

On obtient l'abscisse du point C en faisant y = 0, soit $x = x_0 + 1$, donc C $(0 ; x_0 + 1)$.

b) Le triangle ABC est rectangle en A, donc son aire est donnée par :

$S_2 = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{e^{1-x_0} \times (x_0 + 1 - x_0)}{2} = \frac{e^{1-x_0}}{2}$ Donc $S_1 + 2S_2 = e - e^{1-x_0} + 2 \times \frac{e^{1-x_0}}{2} = e$.

CHAPITRE 5

Logarithme Népérien

Objectif 1

Manipuler les propriétés algébriques de la fonction ln

ENONCES

Ecrire les expressions sous la forme : $\ln a$, où a est un réel strictement positif

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln 3-\ln 12+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$

b) $-\ln 3+\ln(27e)-\ln\left(9\sqrt{e}\right)$

c) $\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+8\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

SAVOIR

$\boxed{\ln 1=0}$ et e est le nombre de Néper, défini par $\boxed{\ln e=1}$

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$, $\ln\left(a^n\right)=n\ln a\left(n\in\mathbb{Q}\right)$

SOLUTIONS

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln 3-\ln 12+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)=\ln\left[\underbrace{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}_{3-1}\right]+\ln\left(\frac{3}{12}\right)$

$=\ln 2+\ln\frac{1}{4}=\ln\frac{1}{2}=\ln 2^{-1}=-\ln 2$

b) $-\ln 3+\ln(27e)-\ln\left(9\sqrt{e}\right)=\ln\left(\frac{27e}{3\times 9\sqrt{e}}\right)=\ln\left(\sqrt{e}\right)$

$=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

c) $\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

$=\ln\left[\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right]+7\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

$=\ln\left[17+12\sqrt{2}\right]+7\ln\left[\underbrace{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}_{2-1}\right]$

$=\ln\left(17+12\sqrt{2}\right)+7\ln 1=\ln\left(17+12\sqrt{2}\right)$

Objectif 2

Reconnaitre les valeurs remarquables de la fonction ln

ENONCES

Donnez la valeur exacte de $f(e), f\left(\frac{1}{e}\right), f(\sqrt{e})$ et $f(e^2)$ dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto (\ln x)^2 - \ln x$ b) $f : x \mapsto \ln(x^2) - \ln x$

SAVOIR

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$; $\ln(e^n) = n$

SOLUTIONS

a) $f(e) = (\ln e)^2 - \ln e = 0$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right]^2 - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(\sqrt{e}) = \left[\ln(\sqrt{e})\right]^2 - \ln\sqrt{e} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $f(e^2) = \left(\ln(e^2)\right)^2 - \ln(e^2) = (2)^2 - 2 = 2$

b) $f(e) = \ln(e^2) - \ln e = 2 - 1 = 1$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = -1$

$f(\sqrt{e}) = \ln\left((\sqrt{e})^2\right) - \ln(\sqrt{e}) = \ln e - \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$; $f(e^2) = \ln\left((e^2)^2\right) - \ln e^2 = \ln e^4 - 2 = 2$

Objectif 3 Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction ln

ENONCES

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation et inéquations suivantes :

1) a) $\ln x = 1$ b) $\ln x = -2$ c) $\ln x = \frac{1}{2}$

2) a) $\ln x = \ln(3x-1)$ b) $\ln(x^2) = -2\ln 7$

3) a) $\ln(x+2) = \ln(2x-1) + \ln(4-x)$ b) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$

4) a) $\ln x > -1$ b) $\ln x \leq \frac{2}{3}$ c) $\ln x \leq 3\ln 2$

5) a) $\ln(1-3x) \leq -\ln x$ b) $3(\ln x)^2 - 8\ln x + 4 < 0$ c) $\frac{(x-2e)\ln x}{(3-2\ln x)(2+\ln x)} > 0$

SAVOIR

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
- On a : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Pour tous réels a et b strictement positifs : $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ et $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

SOLUTIONS

1) a) $x = 2$ b) $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ c) $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

2) a) L'ensemble de définition de l'équation est $]\frac{1}{3};+\infty[$; nous trouvons : $x = 3x - 1$,

soit $x = \frac{1}{2}$, qui convient.

b) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. L'équation équivaut à : $\ln(x^2) = \ln\frac{1}{7^2} = \ln\frac{1}{49}$ D'où $x^2 = \frac{1}{49}$,

soit : $x \in \left\{-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right\}$; ces deux solutions conviennent

3) a) L'ensemble de définition est $\left]\frac{1}{2};4\right[$ (les conditions sont : $x+2>0$, $2x-1>0$, $4-x>0$)

Résolvons : $\ln(x+2)=\ln((2x+1)(4-x))$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)=\ln(-2x^2+9x-4) \Leftrightarrow x+2$

$=-2x^2+9x-4 \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

Les solutions sont 1 et 3 $(1-4+3=0)$; elles conviennent toutes les deux.

b) L'ensemble de définition est $]0,+\infty[$; posons $X=\ln x$

Nous trouvons $X^2-7X+6=0$; les solutions en X sont 1 et 6. Donc $\ln x=1$ ou $\ln x=6$, soit $x=e$ *ou* $x=e^6$, solutions qui conviennent.

4) a) $S=\left]e^{-1};+\infty\right[\left(car\ -1=\ln\frac{1}{e}=e^{-1}\right)$

b) $S=\left]0;e^{\frac{2}{3}}\right]\left(car\ \frac{2}{3}=\ln\left(e^{\frac{2}{3}}\right)\right)$

c) $S=]0;8]\,(car\ 3\ln 2=\ln 8)$

5) a) L'ensemble de définition est $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ (les conditions sont : $x>0$ *et* $1-3x>0$)

Nous trouvons : $\ln(1-3x)\le\ln\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 1-3x\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow 0\le 3x^2-x+1(car\ x>0)$

Le discriminant étant négatif, $3x^2-x+1$ est toujours strictement positif. Nous en déduisons l'ensemble des solutions : $\left]0;\frac{1}{3}\right[$

b) L'ensemble de définition est $]0,+\infty[$. Posons $X=\ln x$

Nous trouvons $3X^2-8X+4<0$; cela équivaut à $X\in\left]\frac{2}{3};2\right[$

$\left(\Delta'=4$ les racines sont donc $\frac{4-2}{3}$ et $\frac{4+2}{3}\right)$ Donc à $\frac{2}{3}<\ln x<2$, ou encore à $e^{\frac{2}{3}}<x<e^2$; l'ensemble des solutions est donc $\left]e^{\frac{2}{3}};e^2\right[$

c) L'ensemble est $]0,+\infty[-\{e^{3/2},e^{-2}\}$ (les conditions sont : $x>0$, $\ln x\neq\frac{3}{2}$, $\ln x\neq -2$)

Le tableau suivant résume la discussion :

x	0	e^{-2}	1	$e^{3/2}$	2e	$+\infty$
$x-2e$	−	−	−	−		+
$\ln x$	−	−	+	+		+
$3-2\ln x$	+	+	+	−		−
$2+\ln x$	−	+	+	+		+
quotient	−	+	−	+		−

L'ensemble des solutions est : $\left]e^{-2};1\right[\cup\left]e^{3/2};2e\right[$

Objectif 4

Déterminer les limites en ∞ des fonctions ln

ENONCES

Trouvez les limites éventuelles en $+\infty$ des fonctions f suivantes :

a) $x \mapsto x - \ln x$ b) $x \mapsto (\ln x)^2 - \sqrt{x}$ c) $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

d) $x \mapsto \frac{x^2}{\ln x}$ e) $x \mapsto x \ln x - (\ln x)^2$ f) $x \mapsto \frac{x}{x - \ln x}$ g) $x \mapsto \ln\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)$

SAVOIR

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Pour tous entiers naturels n et m non nuls : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0}\right)}_{1} = +\infty$, b) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2}\right)}_{+\infty}\right)}_{-\infty} = -\infty$

En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{(\ln y)^2}{y}} = +\infty$ où $y = \sqrt{x}$ $\left(\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^2}{y} = 0^+\right)$

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}-1} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$ où $y = 1+\frac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x^2}} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0^+\right)$

e) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\left(\frac{x}{(\ln x)^2} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\frac{(\ln x)^2}{x}}}_{0^+} - 1\right)}_{+\infty} = +\infty$ f) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0}} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{3x+1}{x-2} = \ln 3$

Objectif 5

Trouver la limite en un point de la fonction ln

ENONCES

Trouvez la limite éventuelle en x_0 des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$; $x_0 = 0$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x - 1}$, $x_0 = e$

c) $f : x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$, $x_0 = 1$

d) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$, $x_0 = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

e) $f : x \mapsto x^2\left(\ln^2 x - x^3\right)$; $x_0 = 0^+$

f) $f : x \mapsto \sqrt{x}\,(\ln x)^3$; $x_0 = 0^+$

SAVOIR

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Pour tous entiers naturels n et m non nuls : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n (\ln x)^m = 0$

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{0} f = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} -\underbrace{\left(\dfrac{\ln y}{y-1}\right)}_{1} = -1$ où $y = 1-x$

b) $\lim\limits_{e^-} f = \lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{1}{\underbrace{\ln x - 1}_{0^-}} = -\infty$ et $\lim\limits_{e^+} f = \lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{1}{\underbrace{\ln x - 1}_{0^+}} = +\infty$; $\lim\limits_{e^-} f \neq \lim\limits_{e^+} f$

et donc f n'a pas de limite en e.

c) $\lim\limits_{1} f = \lim\limits_{x\to 1} x\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ car $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

d) $\lim\limits_{0} f = \lim\limits_{x\to 0} a\dfrac{\ln(1+ax)}{1+ax-1} = \lim\limits_{y\to 1} a\underbrace{\left(\dfrac{\ln y}{y-1}\right)}_{1} = a$ où $y = 1+ax$

e) $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^+} \underbrace{x^2 \ln^2 x}_{0} - x^5 = 0$

f) $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(2\ln\sqrt{x}\right)^3 = \lim\limits_{y\to 0^+} \underbrace{8y(\ln y)^3}_{0} = 0$ avec $y = \sqrt{x}$

Objectif 6 Montrer qu'une droite donnée est une asymptote d'une fonction ln

ENONCES

Démontrer que les droites dont les équations sont données sont asymptotes, en $+\infty$, aux courbes représentant les fonctions f associées.

a) $x \mapsto -x + \ln\dfrac{ex}{x+1}$, $y = -x + 1$

b) $x \mapsto 3x - 1 - \ln\left(\dfrac{2x}{x+7}\right)$, $y = 3x - 1 - \ln 2$

SAVOIR

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$) alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{ex}{x+1}\right)-1$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\ln e}_{1}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(3x-1-\ln 2)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln\left(\dfrac{2x}{x+7}\right)+\ln 2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left[\ln 2+\ln\dfrac{x}{x+7}\right]+\ln 2=\lim\limits_{x\to+\infty}-\underbrace{\ln\left(\dfrac{x}{x+7}\right)}_{1}=0$

Objectif 7

Calculer la dérivée d'une fonction ln

ENONCES

Trouver les dérivées des fonctions proposées sur chacun des intervalles sur les quelles elles sont dérivables.

a) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ b) $f : x \mapsto \frac{\ln(x+2)}{\ln(3-x)}$ c) $\ln^2 x + \ln(x^2+1)$

SAVOIR

Pour tout réel x strictement positif, on a : $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln|u(x)|$ alors f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$

SOLUTIONS

a) f est dérivable si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$ donc f est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x^2}$$

b) f est dérivable si et seulement si $(x+2>0\ ,\ 3-x>0 \text{ et } 3-x\neq 1)$ donc f est dérivable sur $]-2;2[\cup]2;3[$ et pour tout $x \in]-2;2[\cup]2;3[$,

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+2}\right)\ln(3-x) - \ln(x+2)\left(\frac{-1}{3-x}\right)}{\left[\ln(3-x)\right]^2} = \frac{(3-x)\ln(3-x) + (x+2)\ln(x+2)}{(x+2)(3-x)\left[\ln(3-x)\right]^2}$$

c) f est dérivable si et seulement si $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x + \frac{2x}{\ln(x^2+1)} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2x}{\ln(x^2+1)}$$

Objectif 8

Déterminer la primitive d'une fonction en utilisant la fonction ln

ENONCES

Déterminer dans chacun des cas suivant la primitive F de f sur I qui s'annule en x_0.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $I=\mathbb{R}$ et $x_0=0$

b) $f(x)=\tan x$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x_0=0$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $I=]1;+\infty[$ et $x_0=2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $I=]1;+\infty[$ et $x_0=e$

SAVOIR

Si u est une fonction dérivable, non nulle et a dérivée continue sur un intervalle I alors une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x\mapsto\ln|u(x)|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

SOLUTIONS

c) $f(x)=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+2\dfrac{1}{x-1}=1+2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x-1$ donc $F(x)=x+2\ln(x-1)+c$.

$F(2)=2+c=0\Rightarrow c=-2$ et donc $F(x)=x+2\ln(x-1)-2$

d) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=\ln x$ donc $F(x)=\ln(\ln x)+c$.

$F(e)=c=0$ et donc $F(x)=\ln(\ln x)$

Objectif 9

Calculer une intégrale d'une fonction ln

ENONCES

Calculer les inégalités ci-dessous :

a) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$, b) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$, c) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$

SAVOIR

☞ f est une fonction continue sur [a, b] et F une primitive de f sur [a, b] alors

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

☞ Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tout réels a et b de I on a :

$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$

c'est la formule d'intégration par parties

SOLUTIONS

a) On pose $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x \\ v(x) = x \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^e \ln^2 x\,dx = \underbrace{[x\ln^2 x]_1^e}_{e} - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2\underbrace{[x\ln x - x]_1^e}_{1} = e-2$

b) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^e x^2 \ln x\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e}_{\frac{e^3}{3}} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e}_{\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{2e^3+1}{9}$

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \dfrac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \underbrace{\left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2}_{\ln\frac{8}{9}} - \int_1^e \frac{1}{x+1}\,dx = \ln\frac{8}{9} - \underbrace{[\ln(x+1)]_1^2}_{\ln\frac{3}{2}} = \ln\frac{16}{27}$

Objectif 10

Etudier une fonction ln

ENONCES

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0)=0$ et $f(x)=x\ln x$ pour tout $x>0$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f

d) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=e$

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0. Les fonctions $x\mapsto x$ et ln sont continues sur $]0;+\infty[$ donc leur produit f est continue sur $]0;+\infty[$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}$ admet en O une demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

c) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout

$x>0$, $f'(x)=\ln x+1$ qui s'annule en e^{-1} $\qquad \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	0 ↘	$-e^{-1}$	↗ $+\infty$

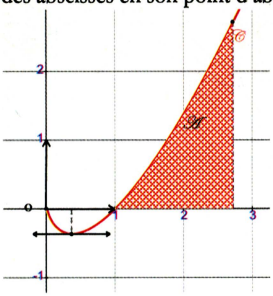
$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

Pour $x>0$; $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en son point d'abscisse 1

Graphique



$\mathscr{A} = \int_1^e x \ln x \, dx \ u.a$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Par une intégration par parties on a :

$$\mathscr{A} = \left[\frac{x^2}{2}\lim\right]_1^2 - \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

CHAPITRE 6

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

Objectif 1

Simplifier des écritures

ENONCES

Préciser si chacune des affirmations est « ***VRAIE*** » ou « ***FAUSSE*** »

1) Pour tout nombre a et tout nombre b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

2) Pour tout nombre réel a et tout réel b : $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

3) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

4) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$.

SAVOIR

a et b sont des réels quelconques(les exponentielles ont toutes les propriétés des puissances.)

- Exponentielle d'une somme : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- Exponentielle d'une différence : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; en particulier : $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$.
- Puissance d'une exponentielle : $\left(e^a\right)^b = e^{a \times b}$.

SOLUTIONS

1) VRAI ; ***2)*** FAUX ; ***3)*** VRAI ; ***4)*** FAUX

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ et $\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}} = \sqrt{e^{2a}} \times \sqrt{e^{2b}} = \sqrt{e^a}^2 \times \sqrt{e^b}^2 = e^a \times e^b$.

2) contre-exemple : avec $a = 0$ et $b = 1$ on obtient $2e^{0+1} = 2e \approx 5{,}44$ alors que $e^{2\times0} + e^{2\times1} = e^0 + e^2 = 1 + e^2 \approx 8{,}39$

3) $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$ équivaut à $e^{2a} + e^{2b} - 2e^{a+b} = 0$ qui équivaut à $(e^a)^2 - 2e^a e^b + (e^b)^2 = 0$ qui équivaut à $(e^a - e^b)^2 = 0$ Avec $e^a = e^b$ ou $a = b$ l'égalité est vraie.

4) $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$ équivaut à : $(e^a)^2 - 2e^a e^b + (e^b)^2 < 0$ qui équivaut à : $(e^a - e^b)^2 < 0$

C'est impossible car un carré ne peut pas être strictement négatif.

Objectif 2 Faire le lien avec le logarithme népérien

ENONCES

Simplifier les nombres suivants : $e^{-\ln\frac{1}{8}}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$; $e^{\frac{1}{2}\ln 4}$; $e^{-\ln(\ln(3))}$.

SAVOIR

- La fonction exponentielle, notée $\exp x$ est la fonction qui, à chaque réel x associe le nombre réel strictement positif e^x où e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$. ($e \simeq 2,718\,281\,828.....$). On a donc pour tout réel x : $\exp x = e^x$.
- Pour tout réel x on a : $e^x > 0$. Une exponentielle est TOUJOURS strictement positive.
- Pour tout réel x et tout réel y strictement positif on a : $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- Pour tout réel x on a : $\ln e^x = x$
- Pour tout réel x strictement positif on a : $e^{\ln x} = x$.

SOLUTIONS

• $e^{-\ln\frac{1}{8}} = e^{\ln 8} = 8$ • $e^{\ln\left(\frac{1}{4^2}\right)} = e^{\ln 2} = 2$ • $e^{-\ln\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{\ln 3}$ • $e^{-\ln(\ln(3))} = e^{\ln\left(\frac{1}{\ln(3)}\right)} = \dfrac{1}{\ln(3)}$

Objectif 3

Résoudre des équations et des inéquations

ENONCES

Résoudre dans IR, les équations et les inéquations suivants :

a) $e^{-x+7} = e^{x+3}$;

b) $e^{x} + e^{-x} = 0$;

c) $e^{2x} \leq 1$;

d) $e^{2x} + 2e^{x} < 3$.

SAVOIR

☞ La fonction $f(x) = e^{x}$ est strictement croissante sur IR. Donc pour tous réels a et b :

✓ $a = b \Leftrightarrow e^{a} = e^{b}$; $a < b \Leftrightarrow e^{a} < e^{b}$

En particulier : $e^{a} = 1 \Leftrightarrow a = 0$; $e^{a} > 1 \Leftrightarrow a > 0$; $0 < e^{a} < 1 \Leftrightarrow a < 0$

SOLUTIONS

a) L'équation est définie sur IR et $e^{-x+7} = e^{x+3} \Leftrightarrow -x + 7 = x + 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S_{IR} = \{2\}$

b) $e^{x} + e^{-x} = 0 \Rightarrow S_{IR} = \emptyset$

c) L'inéquation est définie sur IR et $e^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Rightarrow S_{IR} =]-\infty ; 0]$

d) L'inéquation est définie sur IR et s'écrit $(e^{x})^{2} + 2e^{x} - 3 < 0$, c'est à dire : $t^{2} + 2t - 3 < 0$, avec $t = e^{x}$

Or $t^{2} + 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 1$, donc : $(e^{x})^{2} + 2e^{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow$

$-3 < e^{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < e^{x} < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow S_{IR} =]-\infty ; 0[$

Objectif 4

Etudier des fonctions exponentielles

ENONCES

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=x-1-\dfrac{2}{e^x-1}$ sur IR*.

Montrer que f est une fonction impaire et en déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=e^x+4e^{-x}$ sur IR.

Montrer que $x=\ln 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

3) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur IR.

4) Montrer que $(0\ ;\dfrac{1}{2})$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(e^x+2)$ et c sa courbe représentative..

Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe c au voisinage de $+\infty$.

SAVOIR

☞ La courbe *cf* admet la droite $x=$ a comme axe de symétrie dans un repère orthonormé si pour tout $x\in Df$:

$$\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2a-x)=f(x) \end{cases}.$$

Si $a=0$ La courbe *cf* admet l'axe $(O\ ;\vec{j})$ comme axe de symétrie.

☞ La courbe *cf* admet le point $\Omega(a\ ;\ b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthonormé si pour tout $x\in Df$: $\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2a-x)+f(x)=2b \end{cases}$.

Si $a=0$ et $b=0$ La courbe *cf* l'origine O du repère comme centre de symétrie.

☞ Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ on dit que la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à *cf* au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

SOLUTIONS

1) Pour tout $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$, $f(-x) = -x - 1 - \dfrac{2}{e^{-x}-1} = -x - 1 - \dfrac{-2e^x}{1-e^x} = -x + \dfrac{1-e^x+2e^x}{e^x-1}$

$f(-x) = -x + \dfrac{1+e^x}{e^x-1} = -x + \dfrac{e^x-1+2}{e^x-1} = -x + 1 + \dfrac{2}{e^x-1} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire

$\Rightarrow D_E =]0;+\infty[$

2) *Pour* tout $x \in IR \Rightarrow 2\ln 2 - x \in IR$ et

$f(-x) = e^{2\ln 2 - x} + 4e^{-2\ln 2 + x} = e^{2\ln 2}e^{-x} + 4e^{-2\ln 2}e^{x} = e^{\ln 2^2}e^{-x} + 4e^{\ln 2^{-2}}e^{x}$

$= 2^2 e^{-x} + 4 \times 2^{-2} e^{x} = 4e^{-x} + \cancel{4} \times \dfrac{1}{\cancel{2^2}} e^{x} = 4e^{-x} + e^{x} = f(x)$

Donc $x = \ln 2$ est un axe de symétrie.

3) *Pour* tout $x \in IR \Rightarrow 2 \times 0 - x = -x \in IR$ et

$f(-x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} = \dfrac{\boxed{e^x}}{\boxed{e^x}} \times \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} = \dfrac{1}{e^x+1} + \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x}{1+e^x} = 1 = 2 \times \dfrac{1}{2}$

Donc $(0;\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie

4) $f(x) - x = \ln\left[e^x(1+2e^{-x})\right] - x = \ln e^x + \ln(1+2e^{-x}) - x = \cancel{x} + \ln(1+2e^{-x}) \cancel{-x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+2e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

Objectif 5

Comparer des fonctions

ENONCES

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.

2) Démontrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution dans IR que zéro.

SAVOIR

☞ Pour résoudre des équations ou des inéquations $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, il est quelquefois utile d'étudier les variations de la fonction $f - g$.

☞ Penser au théorème des valeurs intermédiaires pour résoudre les équations de la forme $f(x) = k$ avec k réel.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \; (n \geq 1) \; ; \; \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

SOLUTIONS

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - 1 - x$, f est dérivable comme somme de deux fonction dérivables (la fonction exponentielle et une fonction affine) $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$; $f(0) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

La fonction f presente un minimum absolu égal à zero donc pour tout réel x, $f(x) \geq 0$ et par suite pour tout réel x, $e^x \geq 1+x$

2) Pour démontrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a qu'une solution dans IR, on étudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables :

pour tout $x \in IR$ $g'(x) = f'(x) - x = e^x - 1 - x = f(x)$.

D'après la question 1), $f(x) \geq 0$ pour tout x de IR et f ne s'annule que pour la valeur de zéro.

Donc la fonction g continue est strictement croissante sur IR.

et $g(IR) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

donc $g(IR) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= IR$ or $0 \in IR$. Donc $g(x) = 0$ admet une unique solution et $g(0) = 0$.

$\Rightarrow$ L'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution dans IR que zéro.

Objectif 6

Simplifier des expressions algébriques contenant des puissances

ENONCES

Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants :

$A = 5^{\frac{2}{3}} \sqrt[6]{25}$; $B = \dfrac{2 - \ln \sqrt[3]{e}}{1 + \ln e^2}$

SAVOIR

En utilisant la définition pour $x \in]0 ; +\infty[$; $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \geq 2)$ puis les règles de calcul sur les exposants.

SOLUTIONS

$A = 5^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5$

$B = \dfrac{2 - \ln e^{\frac{1}{3}}}{1 + \ln e^2} = \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2} = \dfrac{\frac{5}{3}}{3} = \dfrac{5}{9}$

Objectif 7

Etudier les fonctions a^x avec a réel strictement positif

ENONCES

f et g sont deux fonction définie sur IR par $f(x)=2^x$ et $g(x)=0{,}5^x$.

a) Dresser le tableau de variation de f et g.

b) Tracer les courbes représentative de f et g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

SAVOIR

☞ Soit a un réel strictement positif.

Pour tout réel x on a : $a^x = e^{x\ln a}$, donc $a^x > 0$.

☞ La fonction $f(x)=a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\left(a^x\right)' = \ln a \times a^x$

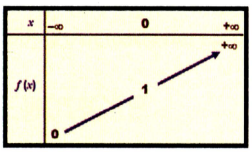
a^x est toujours strictement positive, donc la dérivée a le même signe que $\ln a$.

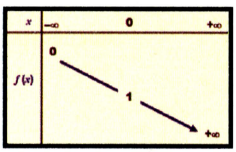
Si $a>1$ alors $\ln a>0$, f est strictement positive et f est strictement croissante sur IR.

Si $0<a<1$ alors $\ln a<0$, f est strictement négative et f est strictement décroissante sur IR.

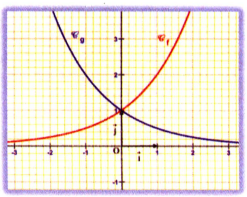
SOLUTIONS

a) a = 2 ; a>1 ; a = 0,5 ; 0 < a < 1





b)



CHAPITRE 7

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Objectif 1

Résoudre une équation différentielle du type $y'=Ky$ $(K \in \mathbb{R})$

ENONCES

Trouver les solutions qu'admet l'équation différentielle $y' + y \ln 5 = 0$ sur $\mathbb{R}$

SAVOIR

☞ Soit K un nombre réel, résoudre l'équation différentielle $y' = Ky$ consiste à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x, $f'(x) = K f(x)$.

☞ Les solutions de l'équation différentielle $y' = Ky$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C e^{Kx}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, l'équation $y' = Ky$ admet une solution f et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

SOLUTIONS

$y' + y \ln 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -y \ln 5$

$\Leftrightarrow y' = y \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

On reconnaît que cette équation est de la forme $y' = Ky$, ses solutions sont donc les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = c\, e^{x \ln\left(\frac{1}{5}\right)} \quad où \ c \in \mathbb{R}$$

$$= c\, (e^{\ln\frac{1}{5}})^x \quad où \ c \in \mathbb{R}$$

$$= c \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad où \ c \in \mathbb{R}$$

Objectif 2

Résoudre une équation du type $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$

ENONCES

Trouver la solution de qu'admet l'équation différentielle $4y' - y = 6$ qui prend la valeur 4 en 0.

SAVOIR

Les solutions l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = C\ e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

SOLUTIONS

Cette équation peut s'écrire sous la forme $y' = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}$, elle est de la forme $y' = ay + b$ ($a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{2}$), ses solutions sont donc les fonctions :

$f : x \to f(x) = C\ e^{ax} - \frac{b}{a}$, soit dans notre cas :

$f : x \to f(x) = C\ e^{\frac{1}{4}x} - 6 \quad$ où $C \in \mathbb{R}$

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de la constante C grâce à la condition initiale imposée $f(0) = 4$ on a donc : $C - 6 = 4$ soit $C = 10$

La fonction f cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 10\ e^{\frac{1}{4}x} - 6$

Objectif 3

Résoudre une équation différentielle du 1er ordre avec second membre

ENONCES

Résolution de (E) : $y' + 2y = e^x + 3$

a) Résoudre l'équation (E') : $y' + 2y = 0$

b) Déterminer a et b de façon à ce que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ae^x + b$ soit solution de (E).

c) Montrer que f est solution de (E) ***si et seulement si*** $(f - g)$ est solution de (E').

d) En déduire les solutions de (E).

SAVOIR

L'énoncé introduit une équation différentielle avec second membre et pose des questions destinées à le résoudre. Ces questions sont pratiquement les mêmes, mais n'est pas forcément le même ordre que ce lui donné dans le principe suivant :

Principe : pour résoudre l'équation avec second membre (E) , on demande de :

a) Résoudre l'équation sans second membre (E')

b) Montrer qu'une fonction g est solution de (E)

c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').

d) En déduire les solutions de (E).

SOLUTIONS

a) On applique la propriété du cours, on trouve que les solutions de (E') sont les fonctions $f_K(x) = K e^{-2x}$, $K \in \mathbb{R}$

b) Le principe de ce genre de question est de remplacer y par g et d'identifier alors les constantes.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = ae^x$, on en déduit que :
$f'(x) + 2f(x) = ae^x + 2(ae^2 + b) = 3ae^x + 2b$, f sera donc solution de (E) si:
$3ae^x + 2b = e^x + 3$, c'est-à-dire, si a et b vérifient :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = 3 \end{cases}$$ C'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$; on a donc : $g(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$

c) $(f - g)$ est solution de (E') $\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$
$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x) = e^x + 3$ (car g est solution de (E'))
$\Leftrightarrow$ f est solution de (E).

d) f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(f - g)$ solution de (E') $\Leftrightarrow f - g = f_K$
$\Leftrightarrow$ f est définie par : $f(x) = f_K(x) + g(x) = K e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$.

Objectif 4

Résoudre une équation différentielle du second ordre

ENONCES

Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$

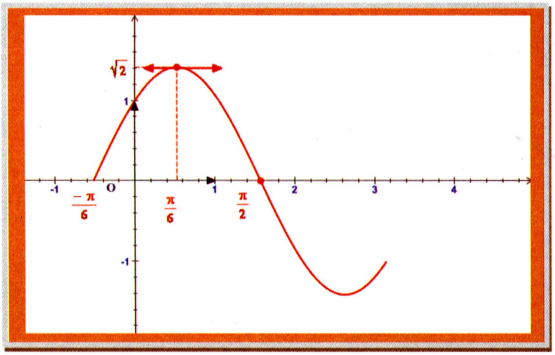
1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Soit f la fonction qui est une solution de l'équation différentielle (E), et dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous. On sait que la courbe (C) passe par $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$ et qu'elle admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

a) Donner les conditions initiales sur la fonction f par lecture graphique.

b) Donner l'expression de f.

3) Vérifier que pour tout réel t , $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.



SAVOIR

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0 (\omega \in \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, $A, B \in \mathbb{R}$

SOLUTIONS

1) $f(t) = A\cos(\frac{3}{2}t) + B\sin(\frac{3}{2}t)$; $A, B \in \mathbb{R}$ $((E) : y'' + (\frac{3}{2})^2 y = 0)$

2) a) $f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}$; $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(-\frac{\pi}{6}) = 0$; $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \\ f'(\frac{\pi}{6}) = 0 \end{cases} \begin{cases} A + B \\ \\ A - B = 0 \end{cases} \qquad (f'(t) = -\frac{3}{2}A\cos(\frac{3}{2}t) + \frac{3}{2}B\sin(\frac{3}{2}t)$$

$$\Leftrightarrow A = B = 1$$

Ainsi $f(t) = \cos(\frac{3}{2}t) + \sin(\frac{3}{2}t)$

3) $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d'où $c = \frac{\pi}{4}$

Ainsi $f = r\cos(\frac{3}{2}t - c) = \sqrt{2}\cos(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4})$

COLLECTION

KOUNOUZ BAC

SECTION

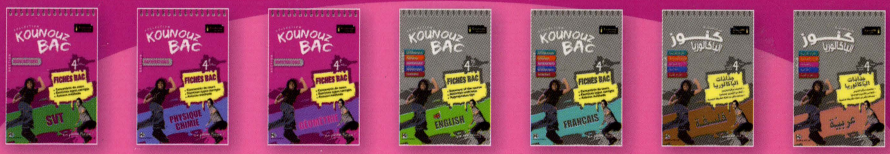
MATHÉMATIQUES

FICHES BAC 4e année secondaire

Chaque fiche traite un point fondamental du programme en proposant :

- Un résumé de cours bien conçu pour comprendre et mémoriser l'essentiel.
- Des exercices types corrigés pour acquérir les bonnes méthodes et éviter les pièges.
- Astuces méthode démarche ingénieuse bien organisée pour aboutir au résultat.

> Dans cette collection



> Découvrez toute la gamme

- **Sciences Informatiques :** Algorithme et Programmation - Base de données - TIC - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - فلسفة - عربية
- **Mathématiques :** Analyse - Géométrie - SVT - Physique/Chimie - Français - Anglais - فلسفة - عربية
- **Techniques :** Mécanique - Électricité - Physique/Chimie - Mathématiques - Français - Anglais - فلسفة - عربية
- **Sciences Expérimentales :** SVT - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - فلسفة - عربية
- **Sciences Économiques :** Économie - Gestion - Mathématiques - Français - Anglais - فلسفة - عربية - تاريخ وجغرافيا
- **Lettres :** Français - Anglais - عربية - فلسفة - تاريخ وجغرافيا - تفكير إسلامي

Kounouz Editions
www.kounouz-edition.com

9 789938 061000
ISBN: 978-9938-061-00-0